ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2009. május 5.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
Az egyenlet gyökei: –1,5 és 8.	2 pont	*Helyes gyökökért 1-1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
A mértani közép: 30.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
Pl.: 	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

4.		
a) igaz	1 pont	
b) hamis	1 pont	*Mivel van olyan tankönyv, ami a periódus fogalmát a szokásostól eltérően definiálja, az igaz válasz is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
$32 \cdot 31 = 992$-féleképpen.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
A kifejezés értéke 4.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
A megfelelő képlet megtalálása.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megfelelő képlet csak a behelyettesített alakban szerepel.*
A képletbe való helyes behelyettesítés.	1 pont	
A sorozat ötödik tagja: –48.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	*A megoldás menetének leírását a közbülső tagok helyes felsorolása is jelentheti.*

8.		
$24 = 2^3 \cdot 3$.	1 pont	*Bármilyen helyes magyarázat 2 pontot ér.*
$80 = 2^4 \cdot 5$.	1 pont	
A legkisebb közös többszörös: $2^4 \cdot 3 \cdot 5 (= 240)$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9.		
$A \cup B = [-1{,}5\ ;\ 20]$.	2 pont	*Csak hibátlan válaszokért jár a 2-2 pont. Aki a helyes megoldás során szögletes zárójel helyett kapcsos zárójelet használ, 1 pontot veszítsen.*
$B \cap A = [3\ ;\ 12]$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Ha az intervallumok helyett az egész számok halmazán dolgozik és a műveleteket helyesen végzi el, 1-1 pontot kap. Aki az alaphalmazt és a végpontok valamelyikét is hibásan kezeli, 0 pontot kap.*

10.		
(0 ; 9).	2 pont	*Helyes koordinátánként 1 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

11.		
18 gépnek kellene dolgoznia.	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

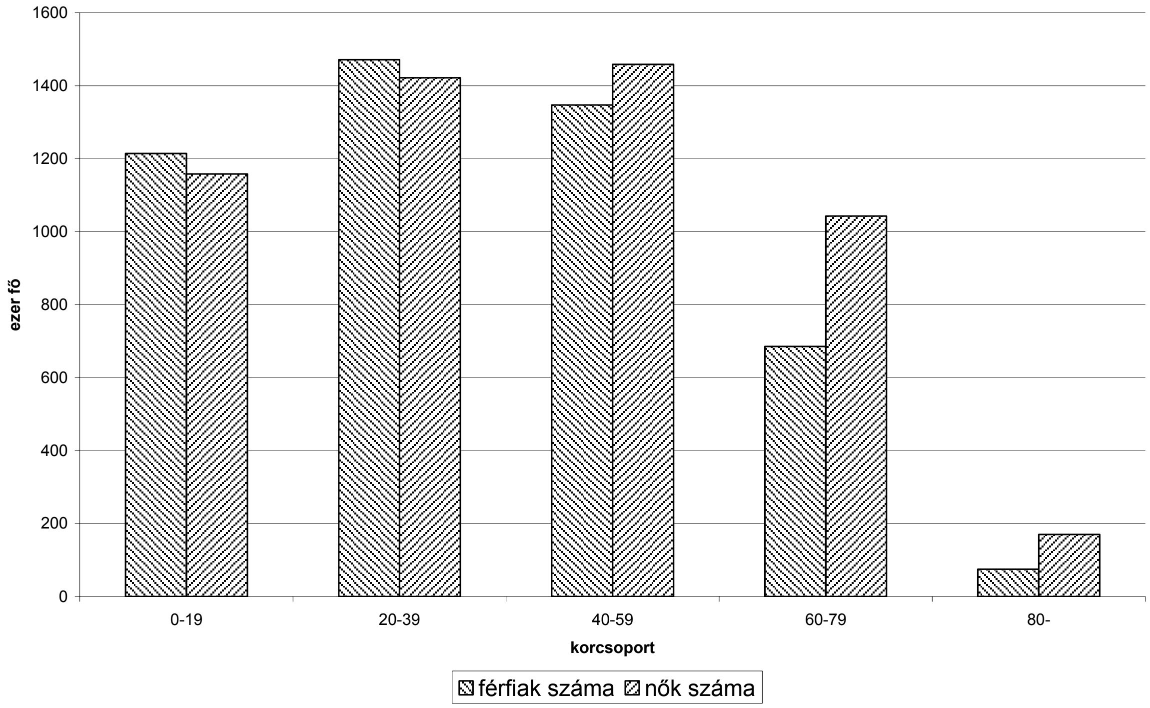
12.		
Ha a gömb sugara *r,* akkor: $\frac{4\pi r^3}{3} = 5000$.	1 pont	
$r^3 = \frac{15\,000}{4\pi} (\approx 1194)$,	1 pont	
ebből $r = \sqrt[3]{\frac{15\,000}{4\pi}}$.	1 pont	*Helyes válasz esetén ez a pont akkor is jár, ha ez az alak külön nem szerepel.*
A gömb sugara 10,6 méter.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Hibás képlet használata esetén a feladatra 0 pontot kap.*

II/A

13. a)

A 20-39 éves korcsoport volt a legnépesebb (2 893 ezer fő).	1 pont	
4 792 ezer (4 792 000) férfi	1 pont	
és 5 251 ezer (5 251 000) nő élt az országban.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

13. b)



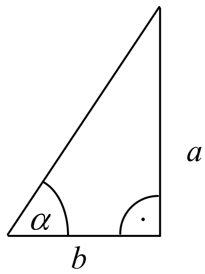
A tengelyek helyes felvétele (egyértelműen kiderülnek a szereplő mennyiségek és a lépték).	1 pont	
Helyes grafikon, jól látható arányokkal.	4 pont	*Adatsoronként (férfiak illetve nők) 2-2 pont. Helyes sávdiagram készítése is teljes értékű.*
Összesen:	**5 pont**	*Ha az összlakosságra készít oszlopdiagramot, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat. Két külön rajzolt helyes diagram 4 pontot ér.*

13. c)		
A 20 évnél fiatalabb férfiak száma 1214 ezer, a korcsoport lélekszáma 2372 ezer fő volt,	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, ez az 1 pont akkor is jár.*
tehát a férfiak százalékos aránya: $\frac{1214}{2372} \approx 0{,}512 = 51{,}2\%$.	1 pont	
A legalább 80 éves férfiak száma 75 ezer, a korcsoport lélekszáma 245 ezer fő volt,	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, ez az 1 pont akkor is jár.*
tehát a férfiak százalékos aránya: $\frac{75}{245} \approx 0{,}306 = 30{,}6\%$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. a)		
Mivel 1-50-ig 7 darab 7-tel osztható szám van,	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, ez az 1 pont akkor is jár.*
az első versenyző $\frac{7}{50}$ valószínűséggel húz 7-tel osztható számot.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. b)		
Ha a jutalom ötödrésze 16 000 forint, akkor a teljes jutalmat 80 000 forintra tervezték.	2 pont	
Az arányok szerint 1 egység a teljes jutalom 10-ed része,	1 pont	*Ha ezek a gondolatok a megoldás lépéseiből derülnek ki, ez az 1-1 pont akkor is jár.*
egy egység 8 000 forintot ér.	1 pont	
Bea kapott volna 16 000 forintot, így ő mondott le a jutalomról.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	*Bármilyen más helyes indoklás esetén is járnak a pontok.*

14. c)		
Mivel 1:3:4 arányban osztották szét a könyvutalványokat,	1 pont	
Anna 10 000, Csaba 30 000, Dani pedig 40 000 forint értékben kapott könyvutalványt.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. a) első megoldás		
		
$(tg\alpha =)\ \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$.	2 pont	*A feladat tartalmának megértése.*
$(T =)\ \frac{ab}{2} = 12$.	1 pont	
Az első egyenletből: $a = \frac{3}{2}b$.	1 pont	
A második egyenletbe behelyettesítés és rendezés után: $b^2 = 16$.	1 pont	
A (pozitív) megoldás: $b = 4$,	1 pont	
$a = 6$.	1 pont	
A befogók hossza 6 cm és 4 cm.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

15. a) második megoldás		
A befogók aránya 3:2.	2 pont	*A feladat tartalmának megértése.*
Az egyik befogó $3x$, a másik $2x$.	1 pont	
a háromszög területe: $\frac{a \cdot b}{2}$.	1 pont	
$12 = \frac{3x \cdot 2x}{2}$.	1 pont	
$x^2 = 4$.	1 pont	
A (pozitív) megoldás: $x = 2$.	1 pont	
A befogók hossza 6 cm és 4 cm.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

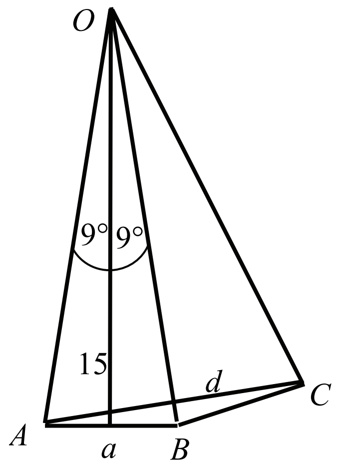
15. b)		
Az α hegyesszög 56,3°,	1 pont	
a másik hegyesszög 33,7°-os.	1 pont	
A derékszögű háromszög átfogója (Pitagorasz tétele szerint) $\sqrt{52} \approx 7{,}2$ (cm),	1 pont	
a kör sugara (az átfogó fele): $\sqrt{13} \approx 3{,}6$ (cm).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Kerekítési hiba esetén összesen 1 pontot veszítsen.*

II/B

16. a)		
A belső szögek 162°-osak,	2 pont	*Ha egy szöget ad meg, a külsőt vagy a belsőt, akkor 2 pontot kap, a mellékszög megadásáért 1 pont jár.*
a külső szögek 18°-osak.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. b)		
Az összes átlók száma $\frac{20 \cdot 17}{2} = 170$.	2 pont	*A képlet helyes használata 1 pont, jó számolás 1 pont. Az összes átló helyes leszámolása is 2 pontot ér.*
Szemközti csúcsokat összekötő átlóból 10 van, (ezek egyenese 1–1 szimmetriatengely) szemközti oldalak felezőpontját összekötő szimmetriatengelyből szintén 10,	1 pont	*Indoklás nélküli helyes válaszokért a 2 pontból 1 pont jár.*
tehát összesen 20 szimmetriatengelye van a sokszögnek.	1 pont	
Egy csúcsból 17 átló húzható, ezek között 8–8 páronként egyenlő hosszú,	1 pont	
tehát 9 különböző hosszúságú átló húzható egy csúcsból.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. c)



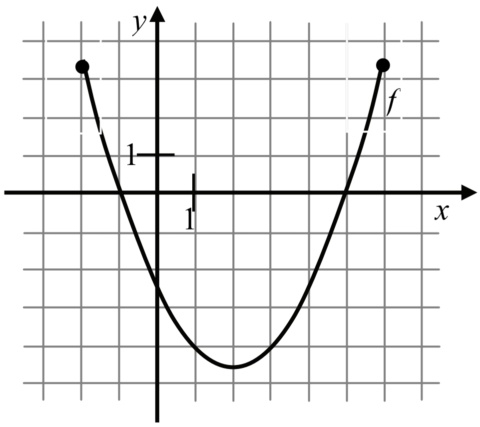
A szabályos 20-szög egy oldalához tartozó (konvex) középponti szög 18°-os.	1 pont	
$\mathrm{tg}\,9° = \dfrac{a}{2\cdot 15}$	1 pont	
$a = 30\cdot \mathrm{tg}\,9°$	1 pont	
$a \approx 4{,}75$ (cm).	1 pont	
A legrövidebb átló egy 162°szárszögű egyenlő szárú háromszögből számolható ki, amelynek szárai ≈ 4,75 cm hosszúak.	1 pont	*Az 1 pont a helyes háromszög megtalálásáért jár.*
$\sin 81° \approx \dfrac{d}{2\cdot 4{,}75}$	1 pont	*Koszinusz-tétellel is számolhat.*
$d \approx 9{,}5\cdot \sin 81°$	1 pont	
$d \approx 2\cdot 4{,}75\cdot \sin 81° \approx 9{,}38\,(\mathrm{cm})$.	1 pont	*9,39 is elfogadható.*
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Ha az indoklás utáni végső válaszok csak a táblázatban szerepelnek, vagy ha a vizsgázó a megoldás során jól megadja a válaszokat, és a táblázatba beíráskor téveszt, ne veszítsen pontot.

belső szögek nagysága	162º
külső szögek nagysága	18º
átlók száma	170
szimmetriatengelyek száma	20
az egy csúcsból húzható különböző hosszúságú átlók száma	9
a legrövidebb átló hossza	9,38(cm)

17. a)		
A függvény hozzárendelési szabálya: $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-4{,}5$.	3 pont	*a, u, v helyes felírása 1-1 pont.*
Összesen:	**3 pont**	*Az* $f(x)=\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2-4{,}5$ *felírása 1 pontot ér.*

17. b)		
A $0{,}5(x-2)^2-4{,}5=0$ egyenletet kell megoldani.	1 pont	
$0{,}5x^2-2x-2{,}5=0$.	1 pont	
$x_1=5$.	1 pont	
$x_2=-1$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Ha az a) részben hibásan felírt másodfokú függvény képletével helyesen számol, 4 pontot kap.*

17. c)		
	4 pont	*A tengelypont helyes megjelenítése 1 pont, a zérushelyek helyes megjelenítése 2 pont, az intervallum-végpontokban helyes értékek 1 pont.* *Ha hibásan felírt képlet alapján legalább két transzformációs lépéssel rajzolt grafikont jól ábrázol, akkor 2 pontot kapjon.*
Összesen:	**4 pont**	

17. d) **első megoldás**		
Átrendezve az egyenlőtlenséget, éppen az $f(x)\le 0$ alakhoz jutunk,	3 pont	
ennek egész megoldásai: -1; 0; 1; 2; 3; 4 és 5.	3 pont	*Ha a helyes intervallumból minden valós számot elfogad, 1 pontot kaphat.*
Összesen:	**6 pont**	

17. d) második megoldás		
$x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ ábrázolása.	1 pont	
$x \mapsto 2x + \frac{5}{2}$ ábrázolása.	1 pont	
Metszéspontok első koordinátáinak leolvasása: $x_1 = -1$; $x_2 = 5$.	1 pont	
Egész megoldások helyes felsorolása.	3 pont	*Ha a helyes interval-lumból minden valós számot elfogad, 1 pontot kaphat.*
Összesen:	**6 pont**	

17. d) harmadik megoldás		
Egy oldalra rendez,	1 pont	
megadja a zérushelyeket: $x_1 = -1$; $x_2 = 5$.	1 pont	
Grafikus vázlattal vagy a főegyüttható előjelével indokol.	1 pont	
Egész megoldások helyes felsorolása.	3 pont	*Ha helyes intervallumból minden valós számot elfogad, 1 pontot kaphat.*
Összesen:	**6 pont**	

18. a)		
A vásárolt kabátok között biztosan lesz legalább 4 selejtes.	2 pont	*Ha ez csak a megoldás gondolatmenetéből olvasható ki, akkor is jár a pont.*
Tehát annak a valószínűségét kell kiszámítani, hogy 4 vagy 5 selejtes kabát lesz a 15 között.	1 pont	
Az egyes esetek valószínűségét a (valószínűség kombinatorikus kiszámítására megismert összefüggés szerinti) $p=\frac{k}{n}$ képlettel számolhatjuk.	1 pont	
A 15 kabátot $\binom{20}{15}$ $(=15504)$-féleképpen (=n) lehet kiválasztani a 20 közül,	1 pont	
$\binom{9}{4}\binom{11}{11}(=126)$ esetben lesz a kabátok között 4 selejtes, (ennek valószínűsége $p_4=\frac{126}{15504}\approx 0{,}008$)	1 pont	*Csak a kedvező esetek számáért jár az 1-1 pont, a $\frac{k}{n}$-ért külön megkapja az 1 pontot, tehát ezért itt már nem adunk pontot.*
$\binom{9}{5}\binom{11}{10}(=1386)$ esetben lesz a kabátok között 5 selejtes, (ennek valószínűsége $p_5=\frac{1386}{15504}\approx 0{,}089$)	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 5 szövési hibás kabát lesz a 15 között, egyenlő a két valószínűség összegével:	1 pont	*Ha ez csak a megoldás gondolatmenetéből olvasható ki, akkor is jár a pont.*
$p=p_4+p_5$	1 pont	
$\frac{1512}{15\,504}\approx 0{,}098\,.$	1 pont	*0,097 is elfogadható.*
Összesen:	**10 pont**	

18. b)		
Ha a megvásárolt kabátok között x db szövési hibás volt, akkor eredetileg $11\,000x+17\,000(15-x)$ Ft-ot kellett volna fizetnie.	2 pont	
A kiskereskedő 14 000·15 = 210 000 forintot fizetett,	1 pont	
így $11\,000x+17\,000(15-x)>210\,000\,.$	1 pont	
$255-6x>210$	1 pont	
$x<\frac{45}{6}=7{,}5$	1 pont	
Legfeljebb 7 szövési hibás kabát volt a 15 között.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	*Véges sok eset –indokolt– végigszámlálása után adott válasz is teljes értékű.*